Algèbre des polynômes

Exercice 1: Résoudre l'équation $P \circ P = P$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.

Exercice 2: En décomposant le polynôme $(1+X)^{2n}$ de deux façons différentes, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Division euclidienne

Exercice 3: Effectuer les divisions euclidiennes de A par B dans chacun des cas suivants.

1. $A = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$ et $B = X^2 - 3X + 1$.
2. $A = X^6 + X^2 - 1$ et $B = X^3 - 1$.
3. $A = X^3 - \mathbf{i}X^2 - X$ et $B = X - 1 + \mathbf{i}$

Exercice 4: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ avec $a \neq b$.

1. Exprimer le reste dans la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
2. Exprimer le reste dans la division euclidienne de P par $(X-a)^2$.

Exercice 5: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Exprimer le reste dans la division euclidienne de $X^n + 2X - 2$ par $(X-1)^2$.

Exercice 6: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Rappeler la formule de Moivre.
2. Détermine le reste dans la division euclidienne de $(\cos(\theta) + X\sin(\theta))^n$ par $X^2 + 1$.

Racines et factorisation

Exercice 7: Factoriser le polynôme $2X^4 - 3X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8: Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes :
$P = X^4 + 1$, $\quad Q = X^4 - X^2 + 1$, $\quad R = X^5 + 1$ et $S = X^8 + X^4 + 1$.

Exercice 9: Soit $P = X^3 + X^2 - 8X - 12$.
Montrer que P admet une racine multiple, puis factoriser P.

Exercice 10: Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$.

1. Déterminer le degré de P, deux racines entières de P puis montrer que $\mathbf{j}$ est racine de P.
2. En déduire la forme factorisée de P dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11: Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $P_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$. Montrer que le polynôme P_n peut se factoriser par $(X-1)^3$.

Exercice 12: Soit $P = X^3 + pX + q \in \mathbb{C}[X]$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que α est racine multiple de P si et seulement si $\alpha^2 = -p/3$ et $2p\alpha + 3q = 0$.
2. En déduire que P possède une racine multiple si et seulement si $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Relations entre coefficients et racines

Exercice 13: Soit $P = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$. On note x_1, x_2 et x_3 les racines complexes de P. Déterminer les trois racines de P sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième.

Exercice 14: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant les relations entre coefficients et racines d'un polynôme, calculer le produit et la somme des racines n-ièmes de l'unité.

Fractions rationnelles

Exercice 15: Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes

$$f : x \mapsto \frac{x}{(x^2-1)^2} \qquad g : x \mapsto \frac{x^5+1}{x^3(x-2)} \qquad h : x \mapsto \frac{x^2+1}{x^4+1}$$

Exercice 16: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

Montrer que la suite (S_n) est convergente, calculer sa limite.

Exercice 17: Déterminer une primitive des fonctions :

1. $f : x \mapsto \dfrac{x}{(x-1)^2(x-2)}$
2. $g : x \mapsto \dfrac{x}{x^3-1}$

Exercice 18: Montrer que $f : x \mapsto \frac{1}{x^3-x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;0;1\}$ et déterminer ses dérivées successives.

Exercice 19: [*] Soit $\theta \in]0;\pi[$. Montrer que

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 2x\cos(\theta) + 1}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer les dérivées successives de f.

Exercice 20: [*] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, décomposer

$$x \mapsto \frac{1}{x^n - 1}$$

en éléments simples dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$.

Polynômes de Tchebychev

Exercice 21: Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par

$$T_0 = 1,\ T_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

1. Déterminer les polynômes T_2 et T_3.
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Établir la relation suivante par récurrence:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ ,\forall n \in \mathbb{N},\ T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$$

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre dans $[0;\pi]$ l'équation $T_n(\cos(x)) = 0$.
5. En déduire la décomposition en facteur d'irréductible de T_n où $n \in \mathbb{N}^*$.